24/11/15

Θεώρημα 2 (Υποβιβασμός τάξης)

Ας είναι y_1 μια λύση της (E_0) με $y_1(x) \neq 0$, $x \in I$.

(i) Για $y = u y_1$ η (E_0) ανάγεται σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση $(E_0)^*$ $n-1$ τάξης

(ii) αν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ένα Β.Σ.Λ της $(E_0)^*$ και $y_i(x) = y_1 \int_{x_0}^{x} v_{i-1}(s)\,ds$, $i = 2, \dots, n$ τότε οι $y_1, \dots, y_n$ αποτελούν ένα ΒΣΛ της (E_0).

Απόδειξη

Για $y = u y_1$ με αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση, έχουμε:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0 \Rightarrow a_n (u y_1)^{(n)} + a_{n-1}(u y_1)^{(n-1)} + \dots + a_0 n y_1 =$$

$$a_n [y_1^{(n)} u + \binom{n}{1} u' + \dots + y_1 u^{(n)}] + a_{n-1} [y_1^{(n-1)} n + \binom{n-1}{1} y_1^{(n-1)} u' + \dots + y_1 u^{(n-1)}]$$

$$+ \dots + a_1 [y_1' u + y_1 u'] + a_0 y_1 u = u[\underbrace{a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_0 y_1}_{L(y_1) = 0}] +$$

$$u' [\underbrace{a_n n y_1^{(n-1)} + \dots + a_1 y_1}_{A_1}] + \dots + u^{(n)} \underbrace{a_n y_1}_{A_{n-1}}$$

$= A_{n-1}u^{(n)} + A_{n-2}u^{(n-1)} + \dots + A_1 u'$. Θέτω $u' = v$. Άρα: $A_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + A_1 v = 0$
ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $n-1$ τάξης.

(iii) $\Rightarrow y_i,\ i=2,\dots,n$ λύσεις
$\Rightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητες
Ας είναι $c_1,\dots,c_n$: σταθερές, με $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n=0$, $x\in I$
Για $x\in I$, έχω: $c_1y_1(x)+c_2y_1(x)\int_{x_0}^x v_1(s)ds+\dots+c_ny_1\int_{x_0}^x v_{n-1}(s)ds=0$
$c_1+c_2\int_{x_0}^x v_1(s)ds+\dots+c_n\int_{x_0}^x v_{n-1}(s)ds=0$ ⊛, όπου $x_0\in I$.
Για $x=x_0$ από την ⊛ έχουμε: $c_1=0$, άρα $c_2\int_{x_0}^x v_1(s)ds+\dots+c_n\int_{x_0}^x v_{n-1}(s)ds=0$, $x\in I$, παραγωγίζοντας την τελευταία:
$c_2v_1(x)+\dots+c_nv_{n-1}(x)=0$, $x\in I \Rightarrow c_2=c_3=\dots=0$, γιατί το $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ ΒΣΛ άρα οι $v_1,\dots,v_{n-1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς $c_1=\dots=c_n=0$ που σημαίνει ότι το σύνολο $y_1,\dots,y_n$ γραμμικώς ανεξάρτητο.

Άσκηση 9 σελίδα 83
$(x^3-2x^2)y''-(x^3+2x^2-6x)y'+(3x^2-6)y=0,\ x>2$.
Να λυθεί με γνωστό ότι $y_1=x^c$, c-σταθερά.

Με αντικατάσταση θα βρούμε $c=3$, που σημαίνει ότι $y_1=x^3$, $x>2$. Μπορεί να λυθεί με τον μετασχηματισμό $y=ux^3$, που θα την υποβιβάσει σε μια μικρότερης τάξης (από το θεώρημα).

$(x^3-2x^2)(u''x^3+2u'3x^2+u6x)-(x^3+2x^2-6x)(u'x^3+3x^2u)+$
$(3x^2-6)(x^3u)=0 \rightsquigarrow \underline{\quad} u''+(\quad)u'+u[6x(x^3-2x^2)-3x^2(x^3+2x^2-6x)+(3x^2-6)x^3]$ που η αγκύλη είναι μηδέν, άρα
$0=(x^3-2x^2)(x^3u'')+u'[(x^3-2x^2)6x^2-(x^3+2x^2-6x)x^3]$ θέτω $u'=z$.
$0=(x^3-2x^2)x^3z'+z[\dots]$ βρίσκουμε το z.
Ένα Β.Σ.Λ. της (E_0) αποτελείται από τα: $x^3,\ x^3\int_{x_0}^x z(s)ds$.

⊙ Άσκηση 7 σελίδα 83 (σπίτι)

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ Γ.Δ.Ε $L(y)=b$ (E)

Εάν έχουμε y_1 λύση της (E)

y_2 λύση της (E) $\rightsquigarrow$ $L(y_1)=b$

$$\frac{L(y_2)=b}{L(y_1)-L(y_2)=0 \rightsquigarrow L(y_1-y_2)=0}$$

Δηλαδή η y_1-y_2 λύση της (E_0) $=y_0$, $y_1=y_2+y_0$.

$L(y)=b_1+\dots+b_k$

$$\left.\begin{array}{ll} L(y_1)=b_1 & \text{μια λύση} \\ \vdots & \text{για κάθε μια} \\ L(y_k)=b_k & \text{από αυτές} \end{array}\right\} \begin{array}{l} L(y_1)+\dots+L(y_k)=b \\ L(y_1+\dots+y_k)=b \\ \text{λύση της αρχικής.} \end{array}$$

Θεώρημα 12

Ας είναι y_μ μια μερική λύση της E. Τότε: Η y είναι μια λύση της (E) $\Leftrightarrow$ $\exists\ \tilde{y}$: λύση της (E_0) με $y=y_\mu+\tilde{y}$

Θεώρημα 13 (Υπέρθεσης)

Αν y_i λύση της $L(y)=b_i$, $i=1,\dots,k$ τότε η $y=y_1+\dots+y_k$ είναι μια μερική λύση της $L(y)=b=b_1+\dots+b_k$

Θεώρημα 14

Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ ΒΣΛ της (E_0), αν $v_1,\dots,v_n\in C^1(I)$, με αγνώστους τις παραγώγους αυτών: (n-εξισώσεις)

$$(\Sigma)\quad \begin{array}{l} y_1v_1'+\dots+y_nv_n'=0 \\ y_1'v_1'+\dots+y_n'v_n'=0 \\ y_1''v_1'+\dots+y_n''v_n'=0 \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)}v_1'+\dots+y_n^{(n-2)}v_n'=0 \\ y_1^{(n-1)}v_1'+\dots+y_n^{(n-1)}v_n'=\dfrac{b}{a_n} \end{array}$$

Τότε βρίσκουμε τα $v_1,\dots,v_n$ και η $y=y_1v_1+\dots+y_nv_n$ είναι μια μερική λύση της (E).

Απόδειξη

$y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ (1)

$y' = y_1' v_1 + y_1 v_1' + y_2' v_2 + y_2 v_2' + \dots + y_n' v_n + y_n v_n'$. Λαμβάνοντας τα δεύτερα κομμάτια στις παραγώγους είναι ακριβώς η πρώτη εξίσωση που είναι ίσα με μηδέν.

$\Rightarrow y' = y_1' v_1 + y_2' v_2 + \dots + y_n' v_n$ (2)

$y'' = y_1'' v_1 + y_1' v_1' + y_2'' v_2 + y_2' v_2' + \dots + y_n'' v_n + y_n' v_n' =$

$= y_1'' v_1 + y_2'' v_2 + \dots + y_n'' v_n$ (3)

$y^{(n-1)} = \dots \rightarrow y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} v_1 + \dots + y_n^{(n-1)} v_n$

$y^{(n)} = y_1^{(n)} v_1 + y_1^{(n-1)} v_1' + \dots + y_n^{(n)} v_n + y_n^{(n-1)} v_n' =$

$= y_1^{(n)} v_1 + \dots + y_n^{(n)} v_n + \frac{b}{a_n}$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με a_0, την (2) με a_1, την (3) με a_2 και και προσθέτοντας

$L(y) = v_1[a_0 y_1 + a_1 y_1' + \dots + a_n y_1^{(n)}] + v_2[a_0 y_2 + a_1 y_2' + \dots + a_n y_2^{(n)}] + \dots + v_{n-1}[a_0 y_{n-1} + a_1 y_{n-1}' + \dots + a_n y_{n-1}^{(n)}] + v_n[a_0 y_n + \dots + a_n y_n^{(n)}] + a_n \frac{b}{a_n} = b$, αφού από γραμμές έχουμε $L(y_1)=0, L(y_2)=0 \dots$

Η ορίζουσα του S'

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, \dots, y_n) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

κ-θέση $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b/a_n \end{pmatrix}$

$$v_k'(x) = \frac{W_k(y_1, \dots, y_n)}{W(y_1, \dots, y_n)}$$

(Θεώρημα 15 σελίδες 88-89 για $x = x_0$, $y(x_0)=0$ πάντα)

$$v_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)}\, ds$$

Παράδειγμα 3 σελίδα 93

$y''' - y'' + y' - y = 1$. Να λυθεί με δεδομένα ότι ένα ΒΣΛ της Εο είναι το $y_1 = e^x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$.

$\rightarrow y(0) = 0 = y'(0) = y''(0)$.

$y=-1$ μερική λύση (απλά με παρατήρηση)

$y(x) = -1 + c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$, και μέσω των συνθηκών παίρνω τα c_1, c_2, c_3.